



TITLE:

Lower Bounds for the Distributions of Certain Multivariate Test Statistics (多変量統計解析 II)

AUTHOR(S):

藤越, 康祝; 磯貝, 恭史

CITATION:

藤越, 康祝 ...[et al]. Lower Bounds for the Distributions of Certain Multivariate Test Statistics (多変量統計解析 II). 数理解析研究所講究録 1975, 247: 41-49

ISSUE DATE:

1975-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105665>

RIGHT:

Lower Bounds For The Distributions Of
Certain Multivariate Test Statistics

神大 養 藤越康祝

阪大 基工 磯貝恭史

§1. 序. 確率行列 A, B は互に独立で, それぞれ,
Wishart 分布 $W_p(p, \Sigma; \Omega)$, $W_p(n, \Sigma)$ に従い, AB^{-1}
の固有根を $d_1 \geq \dots \geq d_p$ とおく. Saw [5] は, $\text{rank}(\Omega)$
 $\leq p - 1$ のとき,

$$(1.1) \quad P\left(\log \prod_{j=1}^p (1+d_j) \leq x\right) \leq P\left(\log \prod_{j=1}^p (1+d_{[p-j]}) \leq x\right)$$

を示している. ここに, $d_1 \geq \dots \geq d_p$ は UV^{-1} の固有
根で, U, V は互に独立に $W_p(p, I_p)$, $W_p(n, I_p)$
に従う Wishart 行列である. (1.1) は回帰係数の次元に関
す尤度比 (= LR) 統計量の仮説のもとでの分布に対する一
つ下界を与えている. この尤度比統計量自身の分布は極めて
複雑であるが, 下界の分布はかなりくわしく調べられており,
(1.1) は棄却度を定める際に有効である.

この報告では, 任意の単調増加関数 $\phi(d_{[p+1]}, \dots, d_p)$ に対

しても, (1.1)型の Bound が求まることを示し, その特別な場合として, (1.1), および, Hotelling's T_0^2 type 統計量, Pillai's V type 統計量 に対する Bounds が求まることを注意する. さらに, Tintner's model における固有根, および, 正準相関係数に関する類似の Bounds を導出し, 統計量への応用を示す.

§2. 固有根に関する Bounds. 次の Lemma 1 は Poincaré Separation Theorem としてよく知られている (c.f. Bellman [1], p. 118).

Lemma 1. p 次の対称行列 A と, $HH' = I_n$ なる任意の $n \times p$ 行列 H に対して,

$$(2.1) \quad \lambda_j(A) \geq \lambda_j(HAH') \geq \lambda_{k+j}(A), \quad j=1, \dots, n$$

が成立する. ここに, $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_p(A)$ は A の固有根である.

関数 $\phi(x_1, \dots, x_n)$ は各 x_j について単調増加関数であるとする.

Lemma 2. 確率行列 A は非心 Wishart 分布 $W_p(n, \Sigma; \Omega)$ に従い, $\text{rank}(\Omega) \leq k = p - n$ とする.

$g_1 \geq \dots \geq g_p$ を $A\Sigma^{-1}$ の固有根とするとき,

$$(2.2) \quad P(\phi(g_1, \dots, g_p) \leq x) \leq P(\phi(t_1, \dots, t_p) \leq x) \\ \leq P(\phi(g_{k+1}, \dots, g_p) \leq x)$$

および, とくべつな場合として,

$$(2.3) \quad P(g_j \leq x) \leq P(t_j \leq x) \leq P(g_{k+j} \leq x), \quad j=1, \dots, p$$

が成立する. ここに, $t_1 \geq \dots \geq t_p$ は U の固有根で, U は $W_p(n, I_p)$ に従う.

[証明] $g_1 \geq \dots \geq g_p$ の分布を扱うとき, $\Sigma = I_p$, $\Omega = \Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_p, 0, \dots, 0)$ としてもよい. $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_p$ は $\Omega\Sigma^{-1}$ の nonzero roots. $H = [0, I_p]$, $U = HAH'$ として, Lemma 1 を用いると (2.2) をうる.

Lemma 3. p 次の対称行列 A , p 次の正定値行列 B , $HH' = I_p$ なる任意の $n \times p$ 行列 H に対して,

$$(2.4) \quad \lambda_j(AB^{-1}) \geq \lambda_j(HAH'(HBH')^{-1}) \geq \lambda_{k+j}(AB^{-1}), \\ j=1, \dots, p$$

が成立する.

[証明] $D = \text{diag}\{\lambda_1(AB^{-1}), \dots, \lambda_p(AB^{-1})\}$ とおく. このとき, $A = RDR'$, $B = RR'$ なる正則行列 R が存在

し,

$$\lambda_j(\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}'(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}')^{-1}) = \lambda_j((\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}')^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{H}'(\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}')^{-\frac{1}{2}}) = \lambda_j(\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}'),$$

$$j=1, \dots, p$$

と表わせる. ここに, $\mathbf{M} = (\mathbf{H}\mathbf{R}\mathbf{R}'\mathbf{H}')^{-\frac{1}{2}}\mathbf{H}\mathbf{R}$. $\mathbf{M}\mathbf{M}' = \mathbf{I}_p$ であることに注意して, Lemma 1 を用いると (2.4) をうる.

この Lemma より, MANOVA case における固有根, おまび, 正準相関係数の分布に対する次の Bounds をうる.

Lemma 4. 確率行列 \mathbf{A} , \mathbf{B} は互に独立で, それぞれ, Wishart 分布 $W_p(p, \Sigma; \Omega)$, $W_p(n, \Sigma)$ に従い, $\text{rank}(\Omega) \leq k = p-1$ とする. $d_1 \geq \dots \geq d_p$ を $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ の固有根とすると,

$$(2.5) \quad P(\phi(d_1, \dots, d_p) \leq x) \leq P(\phi(l_1, \dots, l_p) \leq x) \\ \leq P(\phi(d_{k+1}, \dots, d_p) \leq x)$$

おまび, とくべつな場合として,

$$(2.6) \quad P(d_j \leq x) \leq P(l_j \leq x) \leq P(d_{k+j} \leq x), \quad j=1, \dots, p$$

が成立する. ここに, $l_1 \geq \dots \geq l_p$ は $\mathbf{U}\mathbf{V}^{-1}$ の固有根で,

\mathbf{U} , \mathbf{V} は互に独立で, それぞれ, $W_p(p, \mathbf{I}_p)$, $W_p(n, \mathbf{I}_p)$

に従う。

確率行列 S は Wishart 分布 $W_{p+q}(n, \Sigma)$ に従い, S , Σ を

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}_{\substack{p \\ q}}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}_{\substack{p \\ q}} \quad (p \leq q)$$

と分割する。

Lemma 5. $r_1^2 \geq \dots \geq r_p^2$, $\rho_1^2 \geq \dots \geq \rho_p^2$ をそれぞれ, 標本・母集団正準相関係数の 2 乗, i.e., $S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1}$, $\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1}$ の固有根とする. $\rho_{p+1} = \dots = \rho_p = 0$ のとき,

$$(2.7) \quad P(\phi(r_1^2, \dots, r_p^2) \leq x) \leq P(\phi(\rho_1^2, \dots, \rho_p^2) \leq x)$$

$$\leq P(\phi(r_{p+1}^2, \dots, r_p^2) \leq x)$$

および, とくべつな場合として,

$$(2.8) \quad P(r_j^2 \leq x) \leq P(\rho_j^2 \leq x) \leq P(r_{p+j}^2 \leq x), \quad j=1, \dots, p$$

が成立する. ここに, $p = p - q$, $\rho_1^2 \geq \dots \geq \rho_p^2$ は $U(U+W)^{-1}$ の固有根で, U, W は互に独立で, それぞれ, Wishart 分布 $W_p(q, I_p)$, $W_p(n-q, I_p)$ に従う。

[証明] 確率行列 A, B は $Y: p \times n$ が与えられたとき, 互に独立で, $W_p(q, I_p; \Omega)$, $W_p(n-q, I_p)$ に従うとす

る. ここに, $\Omega = PYP'P'$, $P = \text{diag} (p_1/\sqrt{1-p_1^2}, \dots, p_k/\sqrt{1-p_k^2}, 0, \dots, 0)$, Y の各要素は互に独立で $N(0,1)$ に従う.

Constantine [2] より, $\gamma_1^2 \geq \dots \geq \gamma_p^2$ は $A(A+B)^{-1}$ の固有根のと考えてよい. $H = [0, I_p]$, $U = HAH'$, $W = HBH'$ とおき, Lemma 3 を用いると (2.8) をうる.

§3. 応用. (2.2), (2.5), (2.7) より, ある種の検定統計量の仮説のもとでの分布に対する Lower Bounds が求まる. これらの検定統計量の分布は分っていないが, Bounding Distributions はいろいろ調べられている. Bounding Distribution から定まる棄却率を用いてテストを行うと, そのテストは Conservative になっている.

(i) Tintner's model. 確率行列 X : $p \times n$ の各列は互に独立で, $N(\cdot, \Sigma)$ (Σ は 既知とする) に従い, $E[X] = \mu$ とする. 仮説検定問題 H_1 : $\text{rank}(\mu) = k$, K_1 : $\text{rank}(\mu) > k$ に対して, Tintner [6] は検定統計量, $T = g_{k+1} + \dots + g_p$ を提案している. ここに, $g_1 \geq \dots \geq g_p$ は $XX'\Sigma^{-1}$ の固有根である. 実際, $T \geq c$ のとき, H_1 を受けるという検定方式は LR 方式である. このことは, 例えば, Fujikoshi [3] における Lemma 1 から分る. Lemma 2 より,

仮説 H_1 のもとで,

$$(3.1) \quad P(T \geq c) \leq P(\sqrt{n}U \geq c)$$

をうる. ここに, U は $W_p(n, I_p)$ に従う. 従って, $\sqrt{n}U$ は $\chi^2_{[np]}$ である. c_α を $P(\sqrt{n}U \geq c_\alpha) = \alpha$ ないように定めると, $P(T \geq c_\alpha) \leq \alpha$ となる.

(ii) MANOVA モデルにおける次元に関する検定. 線型仮説問題に対する標準型は次のように表わせる. 確率行列,

$X_1; p \times q$, $X_2; p \times n$ の各列は互に独立で, $N_p(\cdot, \Sigma)$ に従い, $E[X_1] = \Xi$, $E[X_2] = 0$ とする. このとき, " $\Xi = 0$ " をテストする. ここでは, 仮説検定問題 $H_2; \text{rank}(\Xi) = k$,

$K_2; \text{rank}(\Xi) > k$ を考える. このテストに対し次の3つの統計量が提案されている. (1) LR 統計量, $T_1 = \log \prod_{j=1}^p (1 + d_{k+j})$, (2) Hotelling's T_0^2 type 統計量, $T_2 = \sum_{j=1}^p d_{k+j}$, (3) Pillai's V type 統計量, $T_3 = \sum_{j=1}^p d_{k+j} / (1 + d_{k+j})$. ここに,

$d_1 \geq \dots \geq d_p$ は AB^{-1} の固有根で, $A = X_1 X_1'$, $B = X_2 X_2'$ は互に独立で, それぞれ, $W_p(q, \Sigma; \Xi \Xi')$, $W_p(n, \Sigma)$ に従う. Lemma 4 より, 仮説 H_2 のもとで,

$$(3.2) \quad P(T_i \geq c) \leq P(-\log(|V|/|V+U|) \geq c)$$

$$P(T_2 \geq c) \leq P(\text{tr } UV^{-1} \geq c),$$

$$P(T_3 \geq c) \leq P(\text{tr } U(U+V)^{-1} \geq c)$$

をうる。ここに、 U, V は互に独立で、それぞれ、 $W_p(p, I_p)$, $W_p(n, I_p)$ に従う。 T_1 に対する Bound は Saw [5] により求められた。(3.2) における Bounding Distributions は多くの研究者により調べられている(その文献に対しては, e.g., Johnson and Kotz [4] を参照されたし)。

(iii) 正準相関係数に関する検定. Lemma 5 で用いた記号

をつかう。仮説検定問題 $H_3: \rho_{k+1} = \dots = \rho_p$, $K_3: \text{not } H_3$ に対して, MANOVA の場合と同様な次の3つの統計量を考える。

(1) LR 統計量, $Q_1 = -\log \prod_{j=1}^p (1 - r_{k+j}^2)$, (2) Hotelling's T_0^2 type 統計量, $Q_2 = \sum_{j=1}^p r_{k+j}^2 / (1 - r_{k+j}^2)$, (3) Pillai's V type 統計量 $Q_3 = \sum_{j=1}^p r_j^2$. Lemma 5 により, 仮説 H_3 のもとで,

$$P(Q_1 \geq c) \leq P(-\log(|W|/|U+W|) \geq c),$$

$$(3.3) \quad P(Q_2 \geq c) \leq P(\text{tr } UW^{-1} \geq c),$$

$$P(Q_3 \geq c) \leq P(\text{tr } U(U+W)^{-1} \geq c)$$

をうる。(3.3) の Bounding Distributions は (3.2) の Bounding

Distributions において, n を $n-f$ とおくことにより求められる。

References

- [1] Bellman, R.(1960). Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill, New York.
- [2] Constantine, A. G.(1963). Some non-central distribution problems in multivariate analysis. Ann. Math. Statist. 34 1270-1285.
- [3] Fujikoshi, Y.(1974). The likelihood ratio tests for the dimensionality of regression coefficients. J. Multivariate Anal. 4 327-340.
- [4] Johnson, N. L. and Kotz, S.(1972). Distribution in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. Wiley, New York.
- [5] Saw, J. G.(1974). A lower bound for the distribution of a partial product of latent roots. Comm. Statist. 3 665-669.
- [6] Tintner, G.(1945). A note on rank, multicollinearity, and multiple regression. Ann. Statist. Math. 16 304-308.